

Exercices – Séquence n° 18 – PROBABILITÉS (III) : concentration, loi des grands nombres

Contenus	• Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(X - \mu \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$. • Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P(M_n - \mu \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$. • Loi des grands nombres.
Capacités	• Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon en fonction de la précision et du risque choisi. • Exemple d'algorithme : calculer la probabilité de $S_n - np \geq \sqrt{n}$ où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. • Exemple d'algorithme : simulation d'une marche aléatoire. • Exemple d'algorithme : simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Calculer l'écart type s de la série des moyennes à comparer à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks, ou à $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $k = 1, 2, 3$.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 [Mo-Ra-Ca-Co]

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, de variance $V(X)$ et d'écart-type $\sigma(X)$.

- Exprimer les événements donnés sous l'une des formes suivantes $\{|X - a| \leq t\}$ ou $\{|X - a| \geq t\}$ où a et t sont des réels à déterminer :
 - $\{1 \leq X \leq 5\}$
 - $\{X - 2 \leq -2\} \cup \{X - 2 \geq 2\}$
 - $\{X \leq 0\} \cup \{X \geq 6\}$
- Majorer la probabilité demandée dans chacun des cas suivants :
 - $P(|X - E(X)| \geq 20)$ avec $\sigma(X) = 3$
 - $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X))$

Exercice 2 [Mo-Ra-Ca-Co]

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Montrer que : $P(|X - 2| \geq 10) = P(X \geq 12)$.

Exercice 3 [Mo-Ra-Ca-Co]

Une variable aléatoire X a pour espérance $\mu = 250$ et pour variance $V = 125$.

- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir que :

$$P(|X - 250| \geq 20) \leq 0,3125$$
- En déduire alors que :

$$P(|X - 250| < 20) \geq 0,6875$$
- Interpréter cette dernière égalité.

Exercice 4 [Mo-Ra-Ca-Co]

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

- Dans une gare, le nombre moyen de passagers par jour est évalué à 5 000 avec une variance de 2 500. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de passagers enregistrés lors d'une journée et la moyenne soit supérieur ou égal à 100.
- Chaque jour, un train subit au départ un retard aléatoire en minutes, noté X . On donne : $E(X) = 10$ et $\sigma(X) = 5$. Un passager porte réclamation en assurant qu'un jour sur trois, le train a plus de 20 minutes de retard. Que penser de cette contestation ?

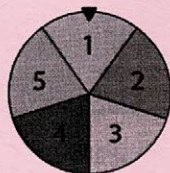
Exercice 5 [Mo-Ra-Ca-Co]

Le nombre de croissants vendus dans une boulangerie en une journée est une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 27.

Que penser de l'affirmation : « La probabilité que la vente de demain dépasse 85 croissants est inférieure à 2% » ?

Exercice 6 [Mo-Ra-Ca-Co]

La roue équilibrée ci-contre est partagée en cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5. On fait tourner la roue 100 fois de suite, X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le 1 est sorti.



- Donner la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance et la variance de X .
- Justifier que pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - 20| \geq \delta) \leq \frac{16}{\delta^2}$.
- En déduire que la probabilité de l'évènement « X prend une valeur en dehors de l'intervalle $[11; 29]$ » est inférieure ou égale à 0,16.

Exercice 7 [Mo-Ra-Ca-Co]

Un service de livraison constate que 5% des colis livrés sont abîmés.

Pendant sa journée de travail, Louis livre 100 colis. On note X le nombre de colis abîmés parmi ces 100 colis.

- Donner la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance μ et l'écart type σ de X .
- Établir que :

$$P(|X - 5| \geq 2\sigma) \leq 0,25$$

- Avec le programme suivant, on réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X . Interpréter le résultat envoyé par la fonction Échantillon.
- a. Saisir le programme.
b. Exécuter plusieurs fois Échantillon(1000). Commenter les résultats obtenus.
- Comparer les résultats obtenus par simulation avec celui donné par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

```

1 from random import *
2 from math import *
3
4 def Ecart():
5     x=0
6     for k in range(100):
7         a=random()
8         if a<=0.05:
9             x=x+1
10    d=abs(x-5)
11    return d
12
13 def Echantillon(n):
14     s=sqrt(4.75)
15     y=0
16     for j in range(n):
17         if Ecart()==2*s:
18             y=y+1
19     p=y/n
20     return p

```

Exercice 8 [Re-Mo-Ra-Ca-Co]

Une urne contient trois boules noires et sept boules blanches. On tire des boules successivement et sans remise, jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule blanche.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance et la variance de X .
- Minorer la probabilité de l'évènement : $|X - E(X)| < 1,625$
- Calculer la probabilité de l'évènement : $|X - E(X)| < 1,625$
 - Comparer le résultat obtenu avec la minoration de la question 3.

Exercice 9 [Mo-Ra-Ca-Co]

On écrit au hasard une suite de n chiffres. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le chiffre 5 apparaît.

- Donner la loi de probabilité de X .
 - Déterminer l'espérance et la variance de X .
- F est la variable aléatoire qui donne la fréquence du chiffre 5 dans l'écriture.
 - Justifier que $F = \frac{X}{n}$.
 - Déterminer l'espérance de la variable aléatoire F .
 - Démontrer que la variance de F est $\frac{0,09}{n}$.
 - Que dire de la variance de F lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?
- Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire F .
 - En déduire que : $P(0,05 < F < 0,15) \geq 1 - \frac{36}{n}$
 - Déterminer n tel que la fréquence d'apparition du chiffre 5 soit comprise entre 5% et 15% avec une probabilité supérieure à 0,9.

Exercice 10 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

On considère une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile est p .

Soit X la variable aléatoire valant 1 si pile est obtenu et 0 sinon. Soit a un réel strictement positif.

Déterminer la valeur de p pour laquelle le majorant de $P(|X - E(X)| \geq a)$ obtenu à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est le plus grand.

Inégalité de concentration, loi des grands nombres**Exercice 11 [Ra-Ca-Co]**

M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire.

Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - 16| \geq \delta) \leq \frac{24}{n\delta^2}$.

Déterminer une taille d'échantillon afin d'obtenir pour M_n , une précision de 0,5 et un risque de 0,1.

Exercice 12 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans une classe de 25 élèves, dix sont des garçons.

On effectue n tirages avec remise d'un élève de cette classe pour l'interroger.

Pour le i – *ème* tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la personne interrogée est un garçon et 0 sinon.

- Donner l'espérance et la variance de X_i .
- En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- Quelle est la valeur minimale de n , pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins 0,1 soit inférieure à 0,05 ?

Exercice 13 [Mo-Ra-Ca-Co]

Un chapeau contient cinq cartes, deux de couleur rouge et trois de couleur noire. On tire au hasard une carte du chapeau.

- La variable aléatoire X donne :
 - 1 si la carte est tirée est rouge.
 - 0 si elle est noire.
 - Donner la loi de probabilité de X .
 - Déterminer l'espérance et la variance de X .
- On réalise n tirages. $X_1, X_2, \dots, X_n$ donne les n valeurs (0 ou 1) obtenues et on pose :

$$M_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n}$$

- Justifier l'inégalité :

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,1) \leq \frac{24}{n}$$

- Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 0,4| \geq 0,1) = 0$$

Interpréter ce résultat.

- Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$,

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,1) \leq 10^{-5}$$

Exercice 14 [Mo-Ra-Ca-Co]

On considère un jeu dont le gain algébrique en euros est modélisé par une variable aléatoire G dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-contre :

k	-2	-1	5
$P(G = k)$	0,8	0,15	0,05

- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire G .
- On considère les 1 000 premières personnes ayant joué à ce jeu durant une semaine. Minorer la probabilité que le gain algébrique moyen sur ces 1 000 personnes soit dans l'intervalle $]-1,7; -1,3[$.
- L'organisateur de ce jeu affirme que, pour 1 000 parties jouées, il est sûr, au seuil de 90 %, de gagner entre 1 300€ et 1 700€ exclus. Que peut-on en penser ?

Exercice 15 [Mo-Ra-Ca-Co]

Sylvain est facteur et distribue le courrier de 2 500 logements. Une première étude a montré que le nombre de logements ayant du courrier lors d'une tournée suit la loi binomiale de paramètres $n = 2 500$ et $p = 0,6$.

Pour les besoins d'une nouvelle enquête, Sylvain relève pendant 200 tournées supposées indépendantes le nombre de logements pour lesquels il dépose du courrier.

- Pour tout entier $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de logements ayant du courrier lors de la tournée n° i . Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour tout entier $1 \leq i \leq 200$.

- On pose $M_{200} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} X_i$.

Majorer la probabilité que M_{200} n'appartienne pas à l'intervalle $]1 400; 1 600[$ puis interpréter cette majoration dans le contexte de l'exercice.

Exercice 16 [Mo-Ra-Ca-Co]

Pour se rendre au travail, Audrey prend le métro. La variable aléatoire T donnant son temps de trajet en minutes a pour espérance $E(T) = 6$ et pour écart-type $\sigma(T) = 0,25$.

Au bout de combien de trajets de métro peut-elle être sûre, au risque d'erreur de 2 %, d'avoir mis en moyenne 6 minutes, à 15 secondes près, pour se rendre au travail ?

Exercice 17 [Mo-Ra-Ca-Co] Bac "Sujet 0"

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie A

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »
 - B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».
- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
 - 2) Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
 - 3) Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.
- 4) Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 .
 - 5) En déduire l'espérance de X . Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
 - 6) On souhaite déterminer la variance de X .
 - a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.
 - b. En déduire $P(X = 1)$.
 - c. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
 - d. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie B

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité de 0,75 de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

- 7) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 8) Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
- 9) Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie C

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

- 10) Calculer l'espérance et la variance de Z .
- 11) Soit n un entier naturel non-nul.

Pour tout entier i variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

- a. Quelle est l'espérance de M_n ?
- b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
- c. Pour les valeurs trouvées en b., montrer que la probabilité de l'évènement $\{6,3 \leq M_n \leq 8,3\}$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 18 [Mo-Ra-Ca-Co] Bac Métropole, juin 2024

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces. Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager
- 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné et on définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet »
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager »
- G : « le client a effectué son achat en grande surface »
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- 2) Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
- 3) Démontrer que $P(S) = 0,8$.
- 4) Un client est satisfait du service clientèle.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il ait effectué son achat sur internet ?

- 5) Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

- 6) En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
- 7) Dans les deux questions a. et b. qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 .

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$
 - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$
- a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .
 - b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet.

Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.